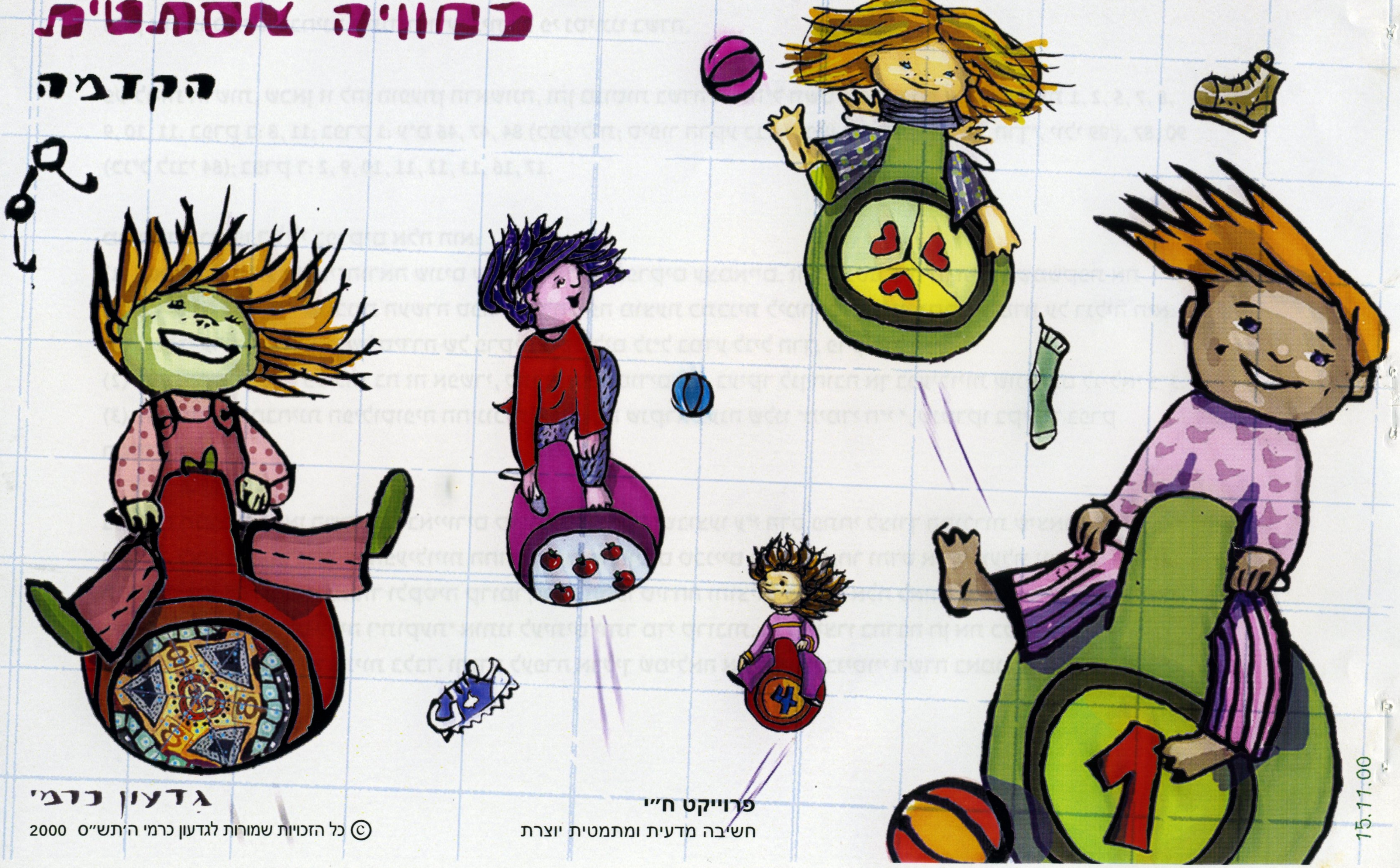
חשבון והנדסה לגיל הרך
כחוויה אסתטית

הקדמה



גדעון כרמי

פרוייקט ח"י
חשיבה מדעית ומתמטית יוצרת

15.11.00

הפרקים שלהן מורכבים מחומר שנוצר ונוסה ברובו בשנתיים האחרונות. חלקים ממנו יצאו בצורה נסיונית ב 98׳ וב 99׳; וכאן אורגנו מחדש מבחינה מתודית ורעיונית על פי נסיוננו בשדה.

פעילויות חדשות, שכאן זו להן הופעתן הראשונה, והן מנוסות בשדה השנה״ל תשס״א, הן: פרק א: הפעילויות 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11. בפרק ב: 8, 11; בפרק ג: ע״מ 46, 47, 84 (כפעילות; סיפור הרקע כבר הופיע ב״חשבון חי לגיל הרך״, יולי 99׳), 87, 90 (כנ״ל לגבי 84); בפרק ד: 2, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17.

מה שחדש באופן **כללי** בפרקים אלה הוא:

(1) האנטגרציה של נושאי־הוראה שונים שהופיעו עד כֹּה בפרקים עצמאיים. זוהי אנטגרציה מן היסוד שמשקפת את המעבר של תכנית ח״י מתכנית העשרה ספורדית לחלופה מוצעת כתכנית לימודים למתמטיקה שעומדת על רגליה היא. אנו בשלבי עריכה ראשינים של סידרה של פרקים מקבילים לנ״ל במדע לגיל הרך, פרק מול פרק.

(2) ההתייחסות, בכל פעילות בה זה אפשרי, לתכנית הלימודים בגן, בעיקר לגן חובה אך בפעילויות שונות גם לגילאי 5־3.

(3) האנטגרציה מבחינת הפילוסופיה החינוכית שלנו (מה שנקרא בעגה שלנו ״מימדי ח״י ״, שנסרקו בקיצור בפרק ההקדמה).

בפרקים המובאים כאן השתמשנו באיורים קודמים מ 98׳־99׳ שבוצעו ע״י הדס פתחי לצורך החוברות שיצאו באותה תקופה. לצערנו נשארו איפוא הפעילויות החדשות עם שרטוטים טכניים בלבד, מאחר והדס אינה פועלת יותר בירושלים. תודתי מקרב לב לאירנה מנסור ולקטיה קרומר, שלא חסכו טירחה והוציאו פרקים אלה לאור במערכת המחשב הביתית, שסימני גיל כבר ניכרים עליה ו״תוקעת״ אותנו לעיתים יותר מדי קרובות. הן גם יצרו בהרבה חן את כל האביזרים החדשים עפ״י הנחיות טלפוניות בלבד. ותודה לעפרה ארליך שמילאה את מקומי בניסויי השדה באמונה ובטוב טעם, בתקופת מחלתי.

מבוא

הפרקים שלפנייך נועדו בעיקר לכיתה א׳. אך יש בהם פעילויות רבות שנוסו בהצלחה גם בגן חובה, וגם לכיתות ב׳.

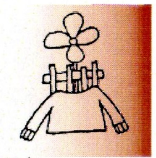
גישתנו לכל שנות ״הגיל הרך״ ־ גן חובה, א׳, ב׳ ־ מבוססת על אותם העקרונות (ראה להלן), וההבדלים בין מה שהילדים מביאים איתם בגילאים אלה מטשטשים את ההבחנה ההרמטית בינהם.

כרעיונות לעבודה בגן חובה ניתן לשלב את הפעילויות לתוך תכנית המסגרת של הגן על פי ההנחיות המוצעות באדום בתחתית העמודים, גם כשרעיונות אלה מבוססים על רעיונות־יסוד חדשים. לדעתנו ולפי נסיוננו הצנוע, שילוב זה עשוי לקדם במידה לא קטנה את החשיבה המתמטית של בני 6־5 ואף לצעירים יותר, ולתרום לאהבת המתמטיקה ולאומץ היצירתי שלהם בה.

לכיתה א׳, החומר מכסה בשפע, יחד עם חוברת ״ב״ שבאותו נושא (יולי 99׳), את כל חומר הלימודים הנדרש בכיתה א׳, אפילו תוך גלישה נכבדה לתוך תכנית המסגרת הרשמית לכיתות ב׳. החומר נוסה בהצלחה ניכרת בצורה נקודתית בכיתות א׳־ב׳ רבות בארץ, אך עדיין לא בצורה פורמלית כתחליף לתכנית הלימודים הרשמית. משרד החינוך מעודד ניסוי בכיוון זה ומתכוון לעקוב אחריו.

לנוחיות מנחות ומדריכות ח״י (פרויקט חשיבה מדעית ומתמטית יוצרת), שגם עבורן נכתבו פרקים אלה, מצורפת בזה בנספח תכנית המסגרת למתמטיקה לגילאי 6-3 של האגף לחינוך קדם-יסודי של משרד החינוך. ההערות באדום בשולי הפרקים שלהלן מציעות כיצד ניתן לשלב פעילויות המודעות על ידינו גם בתכנית מסגרת זו.

דרכי עבודה שלנו בח"י

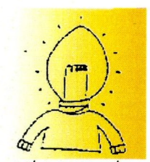

פרח בעמק בסיליקון

1 הקנית בסיס אנטואטיבי איתן.

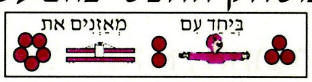
אחת ממטרתנו היא להקנות לילד **בסיס אנטואיטיבי בטוח** לפעילויות הפורמליות ולמושגים של החשבון וההנדסה, בסיס שמטפח נטיה תבונתית להשתמש בהם בכֵּיף בַּיום יום ובסביבה הטבעית , אפילו כמשחק מהנה לשמו, ולהיות יצירתי בהם.

למשל במשחק דוכני מכירות (עמ'), החוקים מעודדים (ע"י "הנחות") לקנות זה מזה את יצירותיהם מפלסטלינה "בכסף גדול" (=במשקולות 5, 3, 2), וכל אחד מנסה תחילה ב5, ומוסיף 3, אח"כ 2 וכ"ו. מי שמצליח לצרף את הסכום הנדרש עד כמה שאפשר בסדר כזה (סדר "לקסיקוגרפי" בלשוננו), יוצא בסוף מורווח. כיוון שכולם מעוניינים ב"הנחות", הם מגלים בדרך זו שניתן לצמצם את תחום תרגילי החיבור, לתרגילים שסדר מחובריהם הוא מן הגדול לקטן בלבד. כך הם נפטרים מן השפע המייאש של אפשרויות החיבור, חשים בתחום זה יותר כ"בעלי בית", ורוכשים יותר בטחון ושמחת התנסות בחשבון.

בנוסף לכך, התהליך אינו דורש מהם לצרף את הסכום הנדרש מיד במדויק, אלא תוך "ניסוי וטעיה": לא הלך בדרך אחת ־ מנסים בשניה, ולומדים מזה הרבה.


וקליק יוצר קליק

2 אנו משתדלים להשאיר לילד "להמציא" את הצעד הבא, ורק להכין לו את כל הדרוש לכך ואת הגרוי הראשוני.

לשם כך אנו מזמנים לו אביזרים וגרויים (רצוי מהסביבה היומיומית שלו בגן או בכיתה) **שהמשחק החפשי** בהם עשוי **להובילו "להמצאת" הפעיליות הפורמליות בעצמו**, כולל תעודן הייצוגי, למשל בצורה 

או אפילו 

. או (עמ' 11), שותלים בחצר בצלצלים בערוגה, ועושים זאת לפי סדר הדבקת המדבקות האדומות על כפות הידים , וכל אחד יודע אח"כ היכן הבצלצל שלו, כי סִימֵן לו מקום זה על פרק־האצבע המתאים של ידו. (תגלית משותפת באחד הגנים).

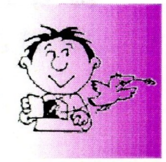

המורה - יש לי קליק!

3 טיפוח היצירתיות התבונית.

כללית, הנחתנו היא **שכל מה שהילד מגלה מעצמו ־ ישאר עימו לעד וישמש לו מקור השראה לגילויים נוספים.**

בעמ' , הילד מגלה למעשה מעצמו את ההפרדות האפשריות של קבוצות לקבוצות חלקיות, ובהמשך גם מתעד זאת כנ"ל בפיסקה 2. כמעט שלא מתעורר כל צורך לבקש מן הילד ליצור הפרדות כאלה ולתעדן, כי אנו הֵכַנּוּ את הבמה לתהליך ספונטני זה בכך שהכנסנו לכיתה את המאזניים האישיים. התנודות האלגנטיות של המאזנים מגרות אותו מיד לשים מעצמו אביזרים קטנים על הכפות ולבדוק האם התנודות נרגעות למצב אופקי של "תיקו". כיוָון שהתיקו אינו מסתדר כל כך כשהוא שׂם על הכפות מחק, מחדד, גולה וכו' ־ הרי שמאיליו נולד בילד החיפוש אחר חפצים קטנים שיאפשרו זאת. למעשה הוא זקוק לחפצים שמשקליהם מתייחסים זה לזה כמו ... 1:2:3:, אך הוא אינו יודע זאת; אבל די להציג בפניו את המשקולות  כדי שיתנפל עליהם כמוצא שלל רב כשהוא מנסה בדרכים שונות לצרף את הקטנים שבהם כנגד אחד או שניים יותר גדולים.

4 אנו מנסים לגשר בין דרכי החישוב (והייצוג) התמימות שהילד מביא עימו לבין תכנית הלימודים הרישמית.


ויחשוף את מה שהביא עימו

למשל, מאז ומתמיד 10 אצבעותיו שימשו לו כ"חשבוניה"; תחילה 5 אצבעות ידו השמאלית, ואחר כך - תוך התגברות על הפער בין יד אחת לשניה - גם ליד ימין: זאת כשהוא יכול להמשיך למנות 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ולא להתחיל בה מחדש ב־1 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 ("התגברות על "**מסיח הפער**"). בעמ' אנו מבססים על "חשבוניה" זו את מרבית הפרק.

5 כללית עלינו לתת לשיטותיו התמימות לגיטמציה פומבית בפני המליאה כולה.


אמא - היום הראיתי לכולם משהו

עלינו להשתדל לפרש את **השפה המתמטית** על פי התמונות והפעולות שהוא רגיל בהן, ולעודד אותו לעשות זאת בפומבי. לדעתנו, רק כך יקנה אמון בחומר החדש וירגיש בו נוח ובטוח, ומאידך לא יאבד את האמון והבטחון במה שהיה רגיל עד כה.

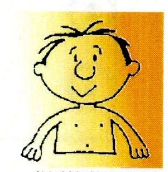
למשל, "החשבוניה הטבעית" של הילד מכינה אותו להשוואת קבוצות של עשרות אברים ללא כל צורך "למנות בָּעַיִן" מעבר ל־3 או 4 (עמ' 8, 10). כבונוס נוסף, "חשבוניה" זו הופכת לו בלא יודעין את השיטה העשרונית כבר בגיל 6־5 לנכס אסתטי של יצירת סדר מאי סדר (וכמעט כבר בכתיב ה"מבוגר" המקובל).

6 אנו מאמינים שהתפתחות החשיבה המתמטית היא צורך מולד טבעי.


הוא כבר פרופסור

ההתפתחות המתמטית מתחילה כבר בשנת החיים הראשונה עם הצורך הבסיסי של התבטאות ריתמית "דָה־דָה־דָה־דָה" בליווי תנועות גפיים, ואחר כך תוך אימוץ בכיף של חרוזים ושירי ילדים ריתמיים, ואשר ה"שיר הסיני" (סיני עבורו בגיל שנה שנתיים) "אחת־שתיים־שלוש־ארבע..." הוא רק אחד מהם. יותר מאוחר הוא מגיע גם להתאמה חד־חד ערכית בין מילותיו של "שיר" זה לבין תנועות היד כשהוא מראה באצבע ימינו על חמש אצבעות שמאלו, או על חפצים או כתמים, ומונה אותם כך לפי הסדר. תהליך זה הוא עמוק ובסיסי, ומשמש אותו לא רע לצרכי הספירה והמניה הראשונים שלו. לכן אנו רוצים מאוד להיזהר שבהגיעו לבית הספר לא תיפול עליו ה"מתמטיקה האחרת", הפורמלית, כקיר לבֵנים, ושלא יחשוב שנגזר עליו לזרוק לפח את ההרגלים התמימים ולשנן את תכנית הלימודים כדקדוק לטיני, שֶׁבֶר שעלול להיגמר באי ביטחון שלו בשניהם.

7 אנו משתדלים לעודד "בניה מכלום" של אביזרים תלת מימדיים קטנים ופשוטים למשחק ולהפעלה,


"היי טק" בגן־א'

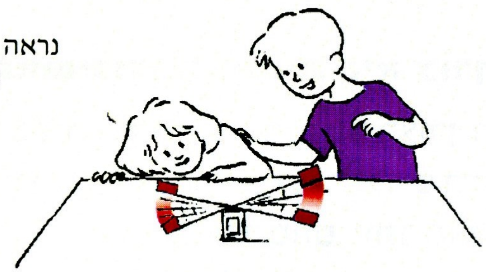
שמשמשים מצידם גם כ"מדע טוב לגיל הרך " הן בבית והן בכיתה או בגן. אין אלה תוספות מלאכותיות לדרך המלך המתמטית; הם נובעים אורגנית מן הצורך בהמחשה פלסטית ותלת מימדית של החומר: בצעצועי מדע וטכנולוגיה קטנים המתמטיקה מוצאת את המחשתה התלת מימדית הטבעית והמתחברת לילד. בנסויים שכאלה המדע מאפשר להוציא

את החשבון וההנדסה מן ה"ארון" הדו מימדי המופשט של דף הניר, שבו, למרבה הצער, מישכנה העיקרי. בגיל הרך אין מורה טוב מ־10 האצבעות החיות וחמשת החושים. **המתמטיקה נולדה בעת העתיקה מן הטכנולוגיה, מן התלת מימד ומן הפיסיקה**, ובהם המחשתה ומקור כל רעיונותיה הבסיסיים. מן הראוי שמתכנני תכניות הלימודים ישקלו ברצינות את איחודם של אלה לתכנית לימודים אורגנית אחת.

למשל סירות הקאפָּה להמחשת מספרים זוגיים ואי זוגיים (עמ'); משחקי משיכה בחבל (עמ') להמחשת תרגילי חיבור; תולעי פּ'ריקי פְּריקי (עמ') להמחשת הפרדת קבוצות לתת קבוצות; "גולופאק"; (עמ'). בלונים מצוירים, מַגְדָלות, צלליות, פָּזֶלים, 7=7, קופסת הצצה, פרספקטוגרף, מחול הכתמים, קלסתרונים, חותמות ־ להמחשת פרופורציות (פרק ה', וביתר פֵּירוט ־ בקְלַסֵייר הפרופורציה (יולי 2000, 198 עמ').

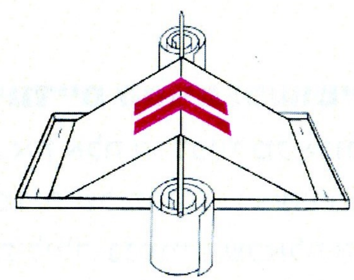
8 מאזניים אישיים לכל ילד להוראת החשבון, בכמה אגורות.

במיוחד, למאזניים יתרונות גדולים על פני אמצעים אחרים בהוראת החשבון:
כאשר אנו משתמשים במאזניים, מושג השוויון אינו מושג מופשט ש"מולבש" על הילד,
ויחסית לאמצעים מוחשיים מקובלים אחרים, המאזניים הם יותר דינמיים, "כֵּיפִיים", ויותר מתאימים לילדים בגיל הרך.

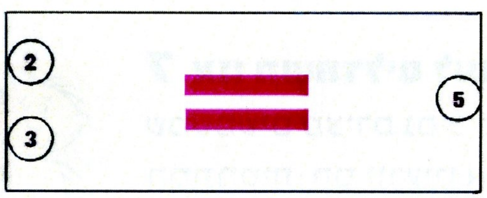


המאזניים חווייתיים לעין וליד: בלא יודעין אנו "מזדהים" עם הכפות המתנדנדות סביב מצב שיווי המשקל, אנו עוקבים בעניין אחרי "התפתחות העניינים" שהולכת ומקרבת אותן לקראת "סוף טוב" של פשרה.
מצב אסתטי סופי זה של איזון אופקי נשאר ייחודי ובולט בתודעתנו: הסימטריה שלו מאצילה משמעות של שיווין גם לגבי מה שנמצא בשתי הכפות ־ בניגוד לָאַסימטריה הפחות אסתטית, שניבטת בנו ומבקשת כביכול את תיקונה, כאשר שתי הכפות אינן בשיווי משקל.

בצורה מעשית, סימן השיווין מופיע למעשה מלכתחילה במרכז המאזניים, בצורה בולטת ובצבע מג'נטה:



במבט מלמעלה כבר ניבטת בנו כך, למעשה, תבנית החיבור, למשל בין המשקולות 3, 2 שמצד אחד לבין המשקולת 5 שבצד השני



הסימן מוכנס בתחילה כתזכורת למצב מאוזן של המאזניים, כאשר הכפותיים מקבילות לשולחן.
נדגיש מיד שוב שלא מדובר בשוויון בין מספרים מופשטים; צבע המַגֶנטה הוא הצבע המוסכם בח"י לאפיון משקלם של גופים, והשוויון הוא **שוויון המשקל** של מה שמונח על כף שמאל של המאזניים ושל מה שמונח על כף ימין; מדובר בשוויון **בתכונה אחת בלבד**. (ר' להלן פיסקה 12 כיצד הילד נגמל אח"כ מן התלות בצבעים השונים שבהם מופיע ה־ : לגובה/אורך, לכמות המרכיבים, למחיר, לכוח ועוד).

9 בעית חמשת התפוחים, שכותבים אותה כאילו שיש עשרה

החשיבות של הגישה הנ"ל להקניית המשמעות של תבנית כמו 2+3=5, בולטת במיוחד כאשר משווים אותה לתרגיל הטיפוסי הבא:
1) "היו לך 2 תפוחים, והוסיפו לך עוד שלושה – כמה יש לך עכשיו?". כל ילד תקין שהגיע זה עתה מגן־חובה לכיתה א' יגיע למסקנה שיש לו עתה חמישה תפוחים, למרות הפער שהוא רואה על השולחן בין 2 התפוחים המונחים מצד אחד, והשלושה שמונחים במרחק מה מהם: . הוא לא יתחיל לספור שוב מ־1 לכשיגיע לקבוצה הימנית (1,2,3 1,2), אלא – אם אכן הוא מעוניין לדעת מהו הס"ה, מהו ה"אוצר" הכולל שיש לו עכשיו – הוא יתגבר על הפער בין הקבוצות (שמנסה להסיח אותו מספירה רציפה), וימשיך לספור "4, 5, 6...". צורת הספירה היא בדרך כלל ספירה באצבע ("ספירה דינמית").

2) עד כאן אין כל חדש, אלא שעתה באים ואומרים לו שאת פעולת הספירה הזו כותבים בצורה 2+3=5, כלומר (אם נרצה להמחיש לו זאת):
; ומשהו כאן לא מסתדר לילד: הרי כאן יש 10 תפוחים, שעה שבתהליך הספירה שלו מופיעים רק 5!

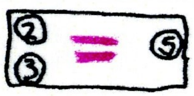
הילד אינו מבין מדוע התבנית 2+3=5 אמורה לייצג את תהליך הספירה שלו – אבל הוא כותב אותה כי כך אמרו לו. בעצם הוא גם אינו מבין מהו **ה + וה = הזה!** אבל נניח שהצלחנו לשכנע אותו ש+ הוא ה"כמה יש לך **ביחד**" (קיצור של = "ביחד"),

וש= פרושו "(ביחד זה) **מאזן את**...", ולכן נניח לזה לרגע. ונניח שיהין ליבו לשאול רק, למה על השולחן יש 5 תפוחים ועל הלוח 10? הרי שבמקרה הטוב יאמרו לו: תמונת חמשת התפוחים שבאגף משמאל - היא מעין "**תצלום-לִפְנֵי**", לפני שהתעלמנו מן הפער שבין שני התפוחים לבין השלושה, ואילו תמונת חמשת התפוחים שבאגף ימין - הריהי "**תצלום-אחרי**" של **אותם** התפוחים, אחרי שהחלטנו לשכוח שחמשת התפוחים האלה נרכשו בשתי "נגלות" שונות... כלומר, למעשה **מצפים מן הילד להבין ולהשתמש בשפה גרפית מורכבת של מבוגרים** - של מודעה שמראה תמונות לפני ואחרי השימוש בסם ההרזיה המומלץ, או של מצב הכלכלה לפני ואחרי הפיחות, וכו'.

10 ובעיה זו נשארת בעינה גם ב"תמונה הדינמית" של המניה

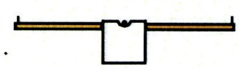
ליתר פרוט: נניח למשל שהילד סופר את  ב"אצבע", ונניח אפילו שבתחילה הוא סופר 123 12, כאשר אצבעותיו נוגעת בעצמים (או בציורים שלהם). ונניח שמעצמו או בעידודינו הוא סופר בפעם השניה 345 12 , דבר שיעשה כמובן תוך נגיעה באצבע **באותם החמישה**, זאת אומרת שבשלב זה יש לפניו עדיין רק חמישה תפוחים. אם נבקש ממנו עתה **לתָעֵד** באמצעות איור את מה שעשה, לא יעלה בדעתו, בדרך כלל, לצייר חמישה תפוחים **נוספים** . אפשר כמובן להדגים לו תחילה את ציורם, מימין לקודמים, וסביר שבעקבות בקשתנו גם הוא יבצע זאת, אך אין זה מבטל את הסתירה הבולטת, והיא - שלעיניו על השולחן היו חמישה תפוחים, ועל הנייר הוא תֵעֵד עשרה! וגם אם נאמר לו שחמשת הימניים מסַפְּרים על חמש **נגיעות חדשות**, הרי מה שנועד תחילה כתעוד ל10 **נגיעות באצבע**, מפַנֶּה מקומו עד מהרה לתמונה **סטטית** של **עשרה תפוחים** כשהוא מסתכל שוב במה שצייר, וכך זה נִיבָּט בו כל פעם שהוא מסתכל בניר. שהרי הנגיעות שלו הן בחזקת צפורים שלא השאירו סימני מעוֹף באויר, והמציאות הדומיננטית נשלטת ע"י 5 התפוחים הפיזיים שעודם מצויים שם. יתר על כן: הכנסת המילה "שווה" (והסימן =) בין שתי החמישיות אינה נובעת מאליה בצורה טבעית ואינטואיטיבית, היא "הונחתה" מלמעלה. הַנְחתה זו נשארת בעינה כאשר מקצרים עוד, וכותבים זאת 2+3=5, ודבר זה מתנקם בנו אחר-כך, לעיתים עד כיתות ד' וה', כאשר מנסים לחסר ע"י העברה מאגף לאגף (ראה חוברת ב' עמ' 106).

11 אצלנו, לעומת זאת, השיוויון 2+3=5 הוא תמונה אינטואיטיבית נאמנה למציאות הפיזית שלפני הילד

אצלנו הילד מגיע לתבנית 2+3=5 מעצמו. תחילה הוא **מצייר** במבט מלמעלה את מצב האיזון שנוצר במאזניים: 

ובציירו אח"כ את מצב האיזון במאזניים הקבוצתיות  הוא מצייר זאת בצורה 

ואחרי ש"קנה" הילד את הפרוש  ("ביחד") עבור ⊥ , הוא מצייר זאת 2+3=5

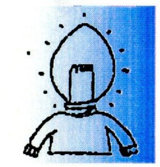


*המאזניים הקבוצתיים עולים ב-10/2000 ב 1.20 ש"ח יותר ממאזני הקרש

12 וככל שנרבה בהמחשות נוספות, כן יראה הילד יותר את המשותף שביניהן, את ה - 2+3=5 ה"טהור"

בהמשך נמחיש את 2+3=5 גם על ידי שיוויונים מסוגים אחרים - שיוויון **באורכם** או **בגובהם** של עצמים, שסימָנו =; שיוויון בכֹּח (כמו בתחרות "משיכת-חבל") שסימָנו =; שיוויון במסה (כמו במשחקי ההדיפות) שסימנו =, שיוויון במחיר (=), וכמובן גם בשיוויון במספר האברים (שסימנו =) ▪▪▪▪▪ = ▪▪▪ + ▪▪, הפעם אכן מדובר בשתי חמישיות (שונות!).**ובזכות ריבוי ההמחשות** והצבעים, תחַפּש אז תודעת הילד מאליה, מרוב שפע, את **המשותף לכולן**, את הפרוטוטיפ הנקי מצבע זה או אחר - הנקי **מכל** צבע. וכך אנו מקוים להגיע, כבר בכיתה א', לפחות **לתחושה** של קיום המספר הטהור, של השוויון המתמטי הטהור כמו 2+3=5, ושל חוקי החשבון לגופם, ולהזדקק פָּחות ופָחות להמחשות.

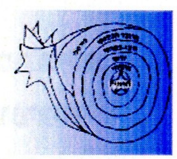
אלא שהפעם יהיו למתמטיקה הטהוֹרה נימיות-שורשים רבות, דקות ובלתי נראות לעין, אשר יונקות כל העת בבלי דעת מנסיון החושים, ומנסיון בֶּעָבָר בהפעלה דינמית של עשר האצבעות ושל כל הגוף. השתרשות זו במציאות המוחשות תאפשר תמיד לילד לחזור ולהמחיש לעצמו בקלות את חישוביו, בכל דרך שירצה או שיבקשו ממנו, - למשל בפתרון "בעיות מולבשות".



13 אל תעורר את ההפשטה עד שתחפץ... ה"קליק" יבוא מאליו!

פעם ראו את חוקי החשבון כאילו הם מעֵין "דקדוק לטיני" של שפה זרה ומנותקת מהמציאות, שעל הילד לסגל לעצמו בצורה פורמלית לגמרי, כפי שלומדים חוקי משחק של שחמט או של קלפים - דרך שהפכה את ההנאה (והשליטה) במתמטיקה לנחלת מעטים. נסיוננו בכיתות עם החומר המובא בזה מציע לנו להאמין שיש גם דרכים אחרות, ושצריך לחכות בסבלנות עד אשר ירצה הילד מעצמו לְקַצֵר את הדרך ולבצע את החישובים כאילו המספרים מתארים כמויות מופשטות.

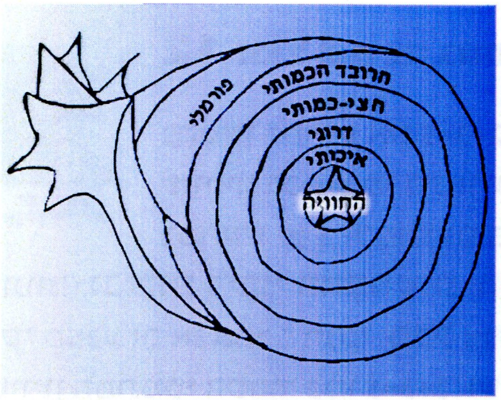
יתר על כן - עלינו לזכור שדרכי החישוב התמימות והאינטואיטיביות שילד מביא עימו לבית הספר הן נכס חשוב ויקר; עלינו לכבדן וליצור גשר משמֵר בינן לבין תכנית הלימודים.



14 הבצל המושגי

1. **החוויה** שמדליקה את ההתחברות של הילד למושג.

2. **"הרובד האיכותי"** - רק עונה לשאלות של "כן" או "לא", של "קיים" או "לא קיים". אין כל התייחסות דירוגית (ל"יותר" או "פחות"). אין כל התייחסות כמותית.



3. **"הרובד הדירוגי"** - בו מבחינים בין "פחות" ו"יותר".

4. **"הרובד החצי־כמותי"** - עדיין בלי כל מספרים, אך בכל זאת מדוייק בזכות חדות חושינו - טביעת העין, דקות המישוש, ההבחנה השמיעתית וכו'.

5. **"הרובד הכמותי"** - כאן מתווספת המדידה הכמותית המספרית בעזרת אבזרים ומכשירים.

6. **"הרובד הפורמלי"** - החוקיות שהמושג נשמע לה, כמו "התאוצה a עומדת ביחס ישר לכֹח המניע F, וביחס הפוך למסה המוּנַעַת" m - וזאת מֵעֵבֶר לכל דוגמה מספרית ספציפית. בדרך־כלל ניתן לביטוי ע"י נוסחה שמקשרת אותיות, כמו F=ma .

הבצל המושגי בחשבון:

1. **הגרעין החוויתי** התחושות השונות שמצבים מסודרים ו"מבולגנים" משאירים בילד ומעוררים בו סיפוק או את הצורך לעשות משהו בנידון.

2. **הרובד האיכותי** ההבחנה בין סדר לאי־סדר (למשל של נקודות; או חפצים או אנשים), ויצירת מצבים כאלה וכאלה.

3. **הרובד הדרוגי** ההבחנה בין סדר מושלם (. . . . . . .) לסדר בלתי מושלם (. . . . .); הבחנה בין סידור יותר צפוף (........) לפחות צפוף (. . . . .).

4. **הרובד החצי כמותי** למשל, הבחנה בין הקצבים טַ - **טָם** - טַ - **טָם** - טַ - **טָם**...
טַ - טֶ - **טָם** - טַ - טֶ - **טָם**...
טַ - טֶ - טַ - טֶ - **טָם** - טַ ...

5. **הרובד הכמותי** למשל, הוספת מספרים לנ"ל: 1 - 2 - **3** - 4 - 5 - 6 ... , **וכן שיקולים אריתמטיים טהורים.**

15 מסיחים, תומכים ו"טעויות חשיבה"

בנושא זה אנו נכנסים לעבי הקורה של השיטה שלנו. תִקְצַר כאן היריעה להביא אפילו רק סקירה של המחקרים שעשינו מתחילת שנות ה־80 בענין זה, בתמיכת קרנות שונות, ואנו מעדיפים להתיחס אליהם כאן רק במסגרת ההֶקשֵרים לפעילויות המופיעות בחוברת הנוכחית של "תחילת חשבון...". הֶקשֵרים אלה מוזכרים בתחתית העמודים, בעיקר לאורך כל חוברת א'. ננסה להסביר כאן רק את תמצית עיקרֶיהָ של השיטה, ונעשה זאת באמצעות סיכום של אחד ממחקרינו הראשונים בַּנושא שהתייחס לניסוי הידוע של פיאג'ה ב"שימור כמות נוזל".

יצאנו מן העובדה **שיכולת הילד להחיל מושג על תופעה או על תהליך שלפניו, רגישה מאוד ליחס הבולטויות (יחסי הכוחות) של המסרים המגיעים אליו מן התופעה:**

יש מסרים שמנסים **להסיח** את הילד מ"לראות" את המושג כרלוונטי בתופעה הנידונה, ויש מסרים **שתומכים** בראייתו. השאלה הקובעת היא, מהו "**מאזן הכוחות**" שביניהם?

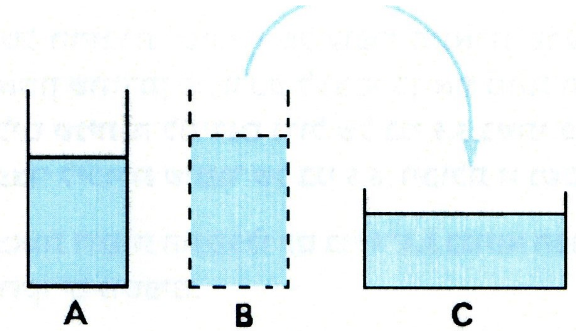
ככל שהילד יותר מנוסה בסוג זה של תופעות, כך הוא יכול להתגבר על "**מסיחים**" יותר "חזקים", והוא "יסתדר" גם אם **התומכים** הם יותר "חלשים".

למשל, בדרך כלל ילד בן 5 אינו מצליח בניסוי השימור הקלאסי (שְׁפִיכה מתיבה גבוהה וצרה לנמוכה ורחבה), כי שינוי גובה פני המים הוא **מסיח** "חזק", וכן פרוק גוף המים לחלקים והעברתם לכלי אחר מחליש את ה"חוזק" של זהות גוש המים, שהוא ה"**תומך**", כששואלים: היכן יש יותר (מים)?

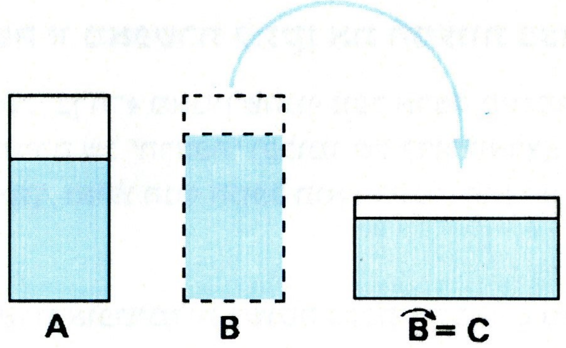
אבל (ג. כרמי, 84', דו"ח לקרן פורד; 87', דו"ח לאקדמיה הישראלית הלאומית למדעים, במסגרת מענקי מחקר רב שנתיים) אם הכלים סגורים ממעל ורק הופכים את התיבה על צידה, במקום לשפוך לאחרת, **גדל פי־3** מספר הילדים המשמרים (ומכאן שה"**תומך**" גדל פי 3!). למעשה **הגיל** בו מתחילה יכולת השימור **יורד בכך בשנה**, בערך, כי מתברר שאחרי "הצלחה" זו הילד מתעלה מעל עצמו ובד"כ יכול לבצע גם את תפקיד פיאג'ה המקובל (loc.cit),וכנראה כך תמיד אחרי "התחשלות" ע"י שרשרת תפקידים מאותו סוג שבהם המסיח הולך ומתחזק.

תוצאות דומות מתקבלות גם בתפקידים קוגניטיביים אחרים.*

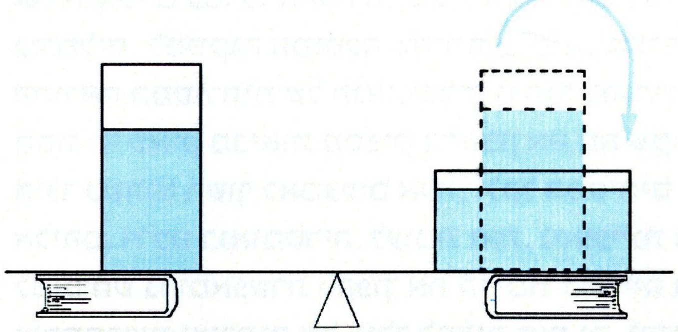
שרשרת "אופטימלית"** (loc.cit) של תפקידים, מדוֹרָגֵי קושי כנ"ל, מאפשרת להאיץ את ההתפתחות של כלי חשיבה קוגניטיביים **וגם של מושגי למידה מדעיים, מתמטיים** או אחרים. יתר על כן: בד"כ ילד מוצא לו בעצמו את השרשרת האופטימלית ביותר, אם התעורר לכך ע"י תפקיד ראשון מתאים. **והסקנו ש"אין למידה משמעותית ללא התגברות מדורגת על מסיחים"!**



1. שינוי גובה פני המים הוא "מסיח" חזק. המים מתאספים בהדרגה מחדש בכלי אחר, ותחושת זהות גוש המים (שהיא ה"תומך") היא חלשה.



2. במקום לשפוך, פשוט הופכים את B על צידה! המים נשארים ב"בֵּיתם" כגוש אחד, וה"תומך" הוא יותר חזק. כתוצאה, פ־3 יותר ילדים בגיל 5.5 "משמרים" עתה!



3. ועתה ־ פ־6 יותר! ב2. ,שאֵלַת הבוחן "היכן יש יותר?" מסיחה ילדים לחפש מימדים שהם "יותר", כמו הגובה. במקומה, שואלים כאן רק "איזה צד יָרַד?"

* מבחני הלפני והאחרי, וכן מבחני היציבות, מראים שההתקדמות הקוגניטיבית המושגת היא בעלת "טרנספר נון־ספציפי" למיומנויות קרובות אך שונות, ואינן מתפוגגות תוך חודשיים, ולמעשה נשארת איתו לעד.

** בשרשרת אופטימלית של תפקידים, כל תפקיד הוא קרוב לקצה גבול היכולת אך עדיין בר־ביצוע.

למשל החוברת "סיפורו של עופר" מתארת שרשרת אופטימלית כזו של "קליקים" אשר עופר המציא לעצמו שלב אחר שלב, בזכות הקליק הראשון שהזדמן לו, ורכש לעצמו כך את מושג הפרופורציה, בגיל 6.5. התוצאות של שרשרת אופטימלית בת 4 תפקידים כנ"ל בשימור־כמות־נוזלים שניתנה למידגם גדול של בני 5.5 בשתי פגישות של כ־20 דקות לכל ילד, במרחק של 4־2 ימים בין פגישה לפגישה, היתה שילדים אלה "קפצו" ליכולת שימור של בני 6.5, ויכולת זו נשמרה להם עפ"י מבחני היציבות.

תוצאות דומות התקבלו עם בני 4־3.5 בנושא הפרופורציה ובנושא שימור־סכום. (מחקר בתמיכת קרן פורד, 84־82'). התוצאות העמקו והוכללו במחקרים נוספים.

בניגוד למונח, השלילי ביסודו, של "טעויות חשיבה" (misconceptions) אנו משתמשים בטרמינולוגיה של מסיחים ושל "יחסי הכוחות" שביניהם (∝). זה מאפשר לנתח את הנסיבות לאי החלת המושג הנכון ואת הכניעה למושג המסיח המטעה.

גישה זו מאפשרת לתקן את המעוות בצורה בּוֹנָה ע"י שרשרת אופטימלית מתאימה.

למשל, בן ה־4 מאמין שהגוף נופל ארצה מיוזמתו ובכוחות עצמו, "משום שהוא רוצה ארצה!". אכן, יש מעט מאד מסרים שתומכים במושג המשיכה של "הרצפה" (כלומר של כדור הארץ): שהרי היא אדישה לגמרי, אינה עושה "שריר" (כפי שהילד היה מצפה מנסיונו), אינה מושיטה יד למשוך, ואילו הגוף הנופל הוא הדינמי, הוא האקטיבי ש"עושה משהו".

שרשרת אופטימלית פשוטה בעלת ∝־ביניים מתאימים יפטרו את הילד מטעות החשיבה שלו (מיושם אצלנו בפרק "כדוריות האדמה").

או: הגדרת זוית כ"שתי קרניים בעלות ראשית משותפת", שמעמידה את הקרניים במרכז ההגדרה, מסיחה את הילד, שחשיבתו טרום־פורמלית, למסקנה המוטעה שהזוית ∠ גדולה מן הזוית ∟.

ההוראה המסורתית של הגאומטריה גדושה בהגדרות ובדרכי הוכחה מסוג זה שאינן מביאות מספיק בחשבון את מה שקורה בראשו של הילד כשהוא חשוף לאמצעים אלה, ולכל המסיחים שמתלווים אליהם. דרכנו בגאומטריה, לעומת זאת, מאופיינת בקשב רב למתרחש בו ומאפשרת להפוך את הלימוד לחוויה בונה ומרתקת ולהתחברות יצירתית של הילד למבנה דעת זה, ובדומה לנושאים מתמטיים ומדעיים אחרים.

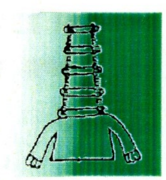
מתוך תחילת הפרק "על גאומטריה וכדוריות האדמה" (ח"י, פורים תשנ"ט) בהמשך הפרק הילד נוכח שאכן האדמה "עושה שריר", אך זהו שריר בלתי נראה ופועל ממרחק.

אין פה איזושהי מפת דרכים?!

16 אנו מנסים לארגן את ה"ג'ונגל" המיאש של כל פעולות החיבור האפשריות, כך שהילד יחוש עצמו כ"בעל-בית" במרחב זה, ישמח לשחק במספרים ויהיה יצירתי בהם.

1. המאזניים שאדישים לסדר 3+2 או 2+3 שבו שמים משקולות על הכף, מאפשרים להתעלם מן **התמורות** שבסידרם של מחוברים, להתעניין רק **בצרופים אפשריים** של מחוברים **שונים**. ואכן חוק החילוף של החיבור מרשה זאת וחוסך לילד תחושה כאילו קיימות "מַעֲבר לפינה" עוד אפשרויות רבות שטרם נתן עליהן את הדעת, תחושה שיכולה להרפות את ידיו בנסיונותיו הספונטניים. מספר התמורות גדול בהרבה ממספר הצרופים, והבדל זה הולך וגדל עם המספר שרוצים לפרקו למחוברים, כך שאכן הילד חוסך בכך הרבה מאד.
כללית, אנו מתַרְגלים את החיבור הרבה יותר בצורת **פרוק מספרים נתונים** למחוברים מאשר בבקשת הסכום של מחוברים נתונים "כלשהם". אנו נותנים איפוא מראש את **התוצאה** של החיבור, את הסכום הסופי. המיקוד מראש על תוצאה מבוקשת מהווה אתגר ומאפשר בקרה עצמית; מספר האפשרויות השונות לבצעו נותן חופש משחק ובאותו זמן הוא מוגבל על ידי גודלו של מספר זה; המפגש החוזר עם קבוצת אפשרויות שכזו **מאפשר לבנות בזיכרון אתרים אתרים** למספרים שמתנסים בפרוקם, אתרים שכל אחד מהם מצומצם וקל לזכירה; ולכל מספר־יעד לפרוק ניקנית כך "אישיות" משלו שנעשית פלסטית ע"י שובל הפרוקים שלו. פוטנציאל זה ל"אישיות" מנוצל בהמשך (עמ') כשאנו בוחרים לכל מספר "חשוב" (10,9,8,7) סיפור ופעילות ייחודיים שיעלה בתודעת הילד את אפשרויות הפרוק של אותו מספר ויעמיד לו אותם בצורה פלסטית לפני עיניו. מתברר ש־4 המספרים (10,9,8,7) הם החשובים לפרוק ומהווים מפתח ליכולת חשבונית.

2. ארגון נוסף של אפשרויות החיבור הוא **ה"ארגון הלקסיקוגרפי" של המחוברים**, כלומר, כשהם יורדים בגודלם לפי הסדר שהם מתווספים לראשון שביניהם, למשל 11=5+3+2+1. זוהי גם דרך חשיבה יעילה בחשבון, במיוחד במקרים שמספר המחוברים אינו נתון מראש והילד יכול להוסיפם אחד־אחד בדרך של "ניסוי וטעיה", עד שהוא השלים לַסכום הדרוש. למשל, במשחקי קניה ומכירה ב"שוק" (עמ'), כשבידי הקונה "מטבעות" (משקולות) של 1,2,3,5 כדי לשלם 9, הוא מתחיל במטבע הגבוהה ביותר 5 ומרגיש שהתקרב למטרה (גם אם עדיין לא ברור לו שמה שחסר זה 4), אחר כך 3 וכו' עד שכבר ברור לגמרי מה דרוש בשלב האחרון, ואינו צריך ליגע את עצמו בחישוב מופשט מראש של כל התהליך: הידים עושות, כביכול, את המלאכה, ואם לא בחר בצעד הטוב ביותר ־ לא נורא..... השיקולים הם **דרוגיים**, שבהם הוא בטוח יותר, והוא הולך בדרך הברוכה של ניסוי וטעיה, והוא מגיע בסופו של דבר לתוצאה **הכמותית**. באותו זמן חסך לעצמו את התלבטויות הבחירה בין כל התמורות האפשריות של סדר בחירתן של אותן המטבעות, ובסך הכל הוא ירגיש עצמו בעל־בית על שיטה מהירה ובלתי מיגעת.



17 "גילוי" שיטת העשרות
שתחילתו בחוברת זו (ע"מ) ועיקרו בחוברת ב'

במיוחד אל לנו להניח שצרוף המילים "עשרים ושלוש" או "שלושים וחמש" אכן נתפס בגיל זה בעליל כ"עשרים ועוד שלוש" או "שלושים ועוד חמש", כפי שהצליל של כינויים אלה מנסה להעיד על עצמו. ראשית, משום שאפילו בצרוף המילים "שלוש ועוד חמש" עוד אין הילד מרגיש עצמו לגמרי בבית. ושנית, משום שהכינויים "שתיים", "שלוש", "ארבע", ..."עשר"

נתפסים אצלו כ"שמות פרטיים" כמו "איציק" ו"מוישה"; וכשאנו עולים איתו הלאה ל"אחת־עשרה", "שתים־עשרה" וכו' הנטיה שלו תהיה, פשוט מתוך אנרציה, לראות גם את אלה כ"שמות פרטיים", ככינויים אידיוסינקרטיים שהצליל שלהם אינו אמור מלכתחילה להעיד על משהו נוסף. רק עם התרחבותה של פעולת החיבור אל מעבר ל־10 תחלחל בהדרגה לתודעה המשמעות הדיקדוקית של צרופי מילים אלה. רק אז יגלה הילד עד כמה שיטת העשרות הכינה עבורו אמצעי־עזר חשבוני מבריק ונפלא, שלקח לאנושות אלפי שנים לפתח אותו.

בניגוד לכמה תכניות אחרות להוראת החשבון, אין אנו משאירים תגלית זו לחסדו של "החלחול האיטי". הילד מגיע אלינו כשהוא מצוייד ב"חשבוניה הטבעית" שלו ־ עשר אצבעותיו, שהוא סופר עליהן משחר ילדותו חפצים או דיקלומים שיריים קטנים. עובדה זו דורשת "נַצְלֵנִי" והיא מטה מראש את הכף לשיטת העשרות, על פני כל בסיסי הספירה האחרים האפשריים תאורטית (למשל שיטת השבע, שמשמשת בעולם התוים במוסיקה, או השיטה הדיגיטלית, של שתי ספרות בלבד, בעולם המחשבים). כבר בעמ' טביעות האצבעות של הילד משמשות לו להמחשת הפרוקים האפשריים של 10 לשני מחוברים, ובעמ' הן משמשות לו כרקע גרפי בדף העבודה שלו להניח פולים או להדביק מדבקות על הניר כשהוא רוצה למנות אותם בצורה מסודרת, עשרות־עשרות, או כדי לסמן בהם בקוקים את אשר הוא מונה. בעמ' הוא נגמל מתזכורת זו לאצבעותיו והוא יכול לבנות את המניה בעשרות כבר ללא אימום תומך זה.


"אמא, בואי תראי ־ אני ואבא אותו דבר! גובהו 7 שיברים ־ וגם גובהי!

18 מיקראה על ייחודו של פרק הפרופורציה

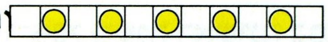
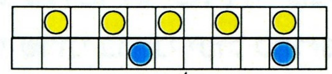
נושא הפרופורציה לגיל הרך הוא נושא מאד "מיוחד": הוא הרבה יותר ממושג מתמטי, ואפילו הרבה יותר ממושג קוגניטיבי־פיאז'ה־י מרכזי: התבנית "זה־לזה הוא כמו זה־לזה..." היא אולי תבנית המפתח באמנות ההוראה, כפי שנטען להלן, אך נציין תחילה שהיא משתרעת מן הרובד ה"איכותי" (של מהויות "כן או "לא" בלבד) של הפרופורציה ("כֹבע לראש זה כמו מכסה לסיר"), דרך הרובד ה"דרוגי" (שבו נשקלים גם שיקולי "פחות" או "יותר"), ("קל לכבד זה כמו קטן לגדול"), ולאחריו הרובד ה"חצי־כמותי" (שהוא מדוייק, אך עפ"י מבט עין בלבד או בעזרת חושים אחרים, ועדיין ללא מספרים) ("לי ולאבא כך רגלנו נכנסת אותו מספר פעמים לקומתנו"); הרובד המספרי־הכמותי(4:6=6:9) ולבסוף הפורמלי, a:b=c:d .

בכל הרבדים האלה, תבנית זו מדברת על שני זוגות (a:b וְ־c:d , כאשר : פירושו "מתיחס ל..." בכל רובד שהוא). שני זוגות אלה יכולים להיות מאד שונים זה מזה, אבל יש להם משהו משותף: ההתייחסות של c לְ־ d היא זהה להתייחסות של a ל־ b. התבנית "זה־לזה הוא כמו זה־לזה" מדגישה את **הזהה חרף השונה**, ובזכות כך **הזהה** בולט מאד לעין, על רקע השונה שמדגיש אותו, ורוכש משמעות, והוא בַּדֶּרֶךְ לֵהָפֵךְ **למושג**. ככל שנַרְבֶּה בַּעימות בין הדומה לשונה, כן יתחוור יותר מושג זה וירכוש בהירות ועָצמה. ־ וכל זאת מבלי שהגדרנו אותו במפורש, ומבלי שהטלנו משהו על הילד "מלמעלה", ־ הוא מגלה הכל בעצמו. כל "אנלוגיה" □ : ג = ב:א היא חידה "קליקית" עבורו, וזאת ־ לגבי מושג כלשהו, אם אך נשכיל לבנות למושג את שרשרת ה"זוגות" המתאימה.

אין פלא, איפוא, שכאשר חיפשנו בח"י דוגמאות מעניינות לפרופורציה, גילינו בהסח הדעת שנושא הפרופורציה הוא מסגרת העל המתודית הטבעית לכל פרקי ח"י, ובכל אחד מהם ה"זה־לזה הוא כמו זה־לזה" משמש כמכשיר מרכזי להבנת הפרק.

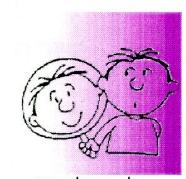
לכל מושג פן "אדום לוהט" שמאפשר להתחבר אליו בכל גיל

19 פיתוח כלי חשיבה קוגניטיביים, כמו:

חשיבה פרופורציונית ("זה לזה הוא כמו זה לזה", מן הרובד האיכותי עד לרובד הכמותי); **"אמנם - אבל"** (אמנם לחמישית קשור מספר יותר גדול, אבל שליש יותר רחב); **פעימות** (הגל הצהוב  והגל התכול  נפגשים  בכל "תחנה" שניה של התכול ובכל תחנה חמישית של הצהוב, ר' עמ'); **"יחסית"** ("הראש של עופר הוא יחסית יותר גדול מראש אביו - הוא נכנס רק שש פעמים לקומתו, וראשו של אבא נכנס לקומת אבא שבע פעמים") (ר' "סיפורו של עופר"); **חוק ההעברה** ($a=b=c$ גורר $a=c$, $a<b<c$ גורר $a<c$) **ומתי הוא קיים** (למשל לא למשחק "אבן-נייר ומספריים"); **פיצוי** (כיצד אבא וילד יכולים להתאזן ב"עלה ורד" ), **מיצוע, קתגוריזציות, הפרדת משתנים, שימור כמות** ועוד.

היציאה מן הצרכים הבסיסיים של הילד

כשאנו באים להנחיל לילד מושג או מיומנות - אנו מנסים לחפש לו חוויה פעלתנית משמעותית, שתְחַבֵּר אותו אל הפן "האדום לוהט" שקיים, לפי השקפתנו, בכל מושג בסיסי שהתפתח בתרבות אנוש - הפן שמוליד את המושג מתוך צורך חיוני של האדם לתפקד ולהישרד בסביבתו:



אני לא נופל מאף אחד!

20 הצורך הבסיסי בדימוי עצמי חיובי

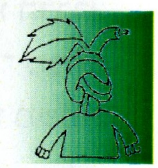
המפתח שאפשר לנו להקנות את מושג הפרופורציה בגיל הרך התגלה לנו על סמך הצורך של רוב הילדים להידמות למבוגר - לאבא או לאמא, לאח או לאחות גדולים. בפעילות "7=7" חבריו משרטטים את קו המיתאר שלו (ע') כשהוא שוכב על גליון גדול שמונח על הרצפה, והוא קם וצועד עקב בצד אגודל מציצית ראשו ועד לכפות רגליו, כשחבריו מסמנים את הצעדים. מתברר שלכולם - וכן למבוגרים - נכנסות פחות או יותר 7 כפות רגליים לקומתם: "אמא - בואי תראי! אני ואבא אותו הדבר! הוא 7 כפות רגליים - וגם אני!"; יתר על כן, הסימונים מראים שהם מתרחשים באותן תחנות הגוף והם: ציצית הראש - הסנטר - מפתח הלב - הטבור - המיפשעה - הברכיים - ואמצע השוק. יחד עם מדידות דומות לרוחב הגוף (למשל מוטַת הזרועות) תוצאות אלו משנות את דימוי הגוף של הילד, כפי שמראה השוואת ציוריו את עצמו לפני ואחרי הפעילות. (ר' ציורי אורלי בת ה-4.5 את עצמה בע').
כידוע ציורי ילד את עצמו מספרים לנו לא רק על דימוי הגוף שלו, אלא על הדימוי העצמי שלו בכלל: דימוי הגוף הוא אספקלריה וגרעין מוחשי לדימוי עצמי, וציוריו את עצמו משמשים בהרחבה לצורך זה בפסיכולוגיה הקלינית של ילדים (ר' "סיפורו של עפר", ג. כרמי, הוצאת תכנית ח"י, תש"ן).

על בסיס חוויה ראשונית זו ניתן לפתח את מושג הפרופורציה הלאה, דרך "רבדי הבצל" שלו (ר' סעיף 14 בהקדמה זו) ולהגיע בגן חובה עד לרובד הכמותי במספרים פשוטים. בהקשר לכך יש לזכור את מחקריו הנרחבים של רוברט קרפלוס מ־Caltec בשנות ה־70, ב־7 ארצות מתועשות, שקבעו שאת התרגיל המוחשי מאוד שממחיש את השאלה $4 : 6 = 6 : \boxed{?}$ הצליחו, בממוצע, לפתור רק 12% מילדי כיתה ד', 42% מילדי כיתה ח', ו־70% משנה ראשונה במכללה (תרגיל "מר קטינא ומר אריכא") (ר' מבחנינו בקלסֵר "פרופורציה", יוני 2000).
כדוגמא אחרת יכול לשמש הפרק כֹּחו של ילד (ר' עמ'): "חשבתי שרוני בריוני יכול להרים 20 שקיות חול (במשיכה אפקית בחבל) ואני רק 2, וכך ניחשו עלינו גם יתר הילדים. והנה הרמתי 4 והוא רק 6!" מחקר שלנו הראה שכיתה שהיתה ידועה לשימצה באלימות שלה שינתה עורה לחלוטין תוך 4 שיעורים כפולים בנושא זה. ואחרי פרק נוסף של התנסות במנופים, גלגילות וכו', הפכה מסוגדת "כֹּח" לסוגדת "מֹח". המדידות יצרו אובייקטיביזציה של מושג "כֹּח" שהיה עד אז אירציונלי, סובייקטיבי, מפחיד וטעון.


הצורך בסימטריה והרמוניה רָדוּם בכל ילד

21 החיפוש אחר הרמוניה, סדר, חזרה קיצבית, אסתטיות וקוהרנטִיות, תאום "קליקי".

אנו מנסים לבסס את דרכנו בחשבון ובהנדסה על צורך זה שקיים בכולנו. לא לחינם אנו מקיפים את עצמנו באגרטלים סימטריים ו"נאים"; בניר קיר שדגם חוזר בו באופן קיצבי, וכמוהו בשטיח, ברקמה, בטכסטיל, בפתוחי ברזל או עץ, ולהבדיל ב"דה־דה־דה..." של תינוק ובהתפעמותו ממירצדה (מובייל) מתנדנדת. נסיון זה עובר כחוט השני דרך חוברת זו. (ר' למשל מיקראה על ה"קליק" עמ'). "הקליק" שבַּגִּילוּי בעזרת המראותיים של משפט הזויות ההֶקֵפִיוֹת  בגיל הרך (ר' ממראותיים – להנדסה", תכנית ח"י 99') "מרטיט" בנפש משהו שחוזר על עצמו במאות גילויים של "מדע לקטנים"(למשל גילוי החוק השני של ניוטון בכיתה א').


ה"קליק" של יצירת הֶקשֵר בלתי שגרתי

22 הצורך לצאת אל הבלתי נודע, אל צרוף חדש ובלתי שגרתי של המוּכָּר.

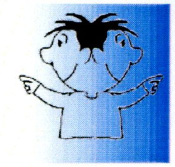
נושא זה נידון בהרחבה בחוברת "מחול הכתמים" (ג. כרמי 91') והוא אחד מיסודות ההתפתחות, האישית ושל החברה בכללה. בחוברת "דו"ח מכיתה א'" אפשר לראות כיצד נפרץ "רדיוס העולם" של ילדים בני 6.5 והגיע עד לתחושה כנה של מימדים אסטרונומיים – בניגוד לדעה המקובלת בהוראת המדעים שאי אפשר ללמד אסטרונומיה עד תחילת החשיבה הפורמלית: מרגע שחוו על בשרם את ה"פי־2", ושל ה"פי 2 מפי־2" וכו', ותפסו שאם יוסי יבלע בזה אחר זה 25 גרגירים שעם כל אחד מהם הוא יגדל פי 2 – אזי ראשו יגיע לירח – וזאת בזכות ההמחשה של מספיק שלבי ביניים – הרי שהבינו גם את סרטי נאס"א שמראים בהדרגה שהם חיים על פני כדור ענק...

23 ההעדפה הברורה של הילד לתובנות שיוצאות מגופו, מחושיו ומתחושותיו.

קל־כבד! תחילה בידיים!
המאזניים מאשרים, ומְעַדנים

לדוגמא: שקילה בגן: תחילה בידיים; המאזניים משמשים לאישור וגם לעידון ההבחנה. ראינו זאת גם לעיל בנושאי פרופורציה, מושג הכֹּח, "על כנפי הפי־2 לירח", ובחוברת הנוכחית בכל פרק.

24 הצורך של הילד לארגן לעצמו (מושגית, אך גם מרחבית) את הסביבה.



ראיית הדומה חרף השונה

הדבר מתבטא בְּצורך מַתְמִיד **ליצור העברות** למקרים אחרים (בעזרת ה"כמו"); **לראות את הדומה חרף השונה** במצבים שונים, ולצעוד כך **להכללה**. צרכים אלה אינם מָעֳרָכִים מספיק בעיני מבוגרים, שחושבים שתפקידם הוא להעניק לילד את ההכללות. אנו גורסים בנדון זה כמו Dwight Allen ('73): "תפקיד המורה הוא לתכנת את עצמה אל מחוץ לסיטואצית הלמידה ־ ולשמש רק כגרוי, כסַפָּק וכבמאי". לדוגמא (עמ' 78): מאז ומתמיד שואפים המחנכים והמומחים בהוראת החשבון להקנות לילד את מיומנות "החשבון הטהור", שבו 2+3=5 משוחרר מתלות בכל המחשה. יש שניסו זאת בדרך שמלמדים דקדוק לטיני ־ על חשבון אהבת החשבון של הילד והיצירתיות שלו בה. דרכנו היא דווקא להרבות ב"צבעים שונים" ל 5 ≡ 3 ≡ 2, ≡ סגול עבור שוויון במשקל, ≡ תכול עבור שוויון בגֹבה או באורך, ≡ כסוף עבור שוויון במחיר, ≡ אפרפר עבור שויון במספר החלקים, ≡ אדום עבור שוויון בכֹּח, וכו'. "העזנו" בכיוון זה כי נוכחנו שתשוקת ההכללה של הילד מיטיבה מאיתנו לבצע את המלאכה; מרוב המחשות הילד רואה יותר ויותר את המכנה המשותף שביניהן, את ה 2+3=5 "הטהור" שנקי מכל צבע. ובדרך זו הוא נשאר עם הבונוס הנוסף, של יכולתו בכל עת להמחיש לעצמו לפי הצורך; ולא להיבהל מבעיות חשבוניות מולבשות.

25 וקודם כל הכיף!

אני לא נופל מאף אחד! (תרתי משמע)

למשל, התנגשויות לונה פרקיות של "עגלות־ניוטון" שילדים יושבים בהם, עם בַּמְּפֵּרִים מבלונים

26 שאין למידה והתפתחות משמעותיים שאינם תהליך עצמאי של התגברות של הילד על מסרים מסיחים המגיעים אליו מן הנידון, שנחוצים לילד כל"גור כלבים המחדד את שיניו על רגלי הרהיטים..."

צרכים בסיסיים אחרים שאנו מנסים להתחשב בהם כוללים את הצורך **להפעיל את כל המרץ**; את **כל הכֹּח**; את **כל התושיה**; את **כל הדמיון**; את **כל הגוף**; הצורך **לארגן (מושגית) לקטגוריות**; **למפות** "בחלל הקוואזי־אויקלידי" שבראשו את הכל, ממש לפי "כיוונים" ו"מרחקים" (גם רעיונות ומידע מופשטים לגמרי); להקדים גישה **כולית לפרטנית**; הצורך בסיפורים; ב"קסמים"; בשמחה והומור; בהתפעמות; ביציאה החוצה (תרתי משמע...) ־ וב"**קליקים**", "**קליקים**", "**קליקים**".